Övningsprov Origo 2b kap 2 , LONG version

Lösningsförslag - one possible solution path

Om ej annat anges krävs fullständiga lösningar, endast svar 0 p

1. Definitionen av den imaginära enheten i utgör grunden för den gren av matematiken som kallas komplex analys.
   Hur definieras i ? (2/0/0)
   Svar: i är ett tal som definieras genom identiteten
   $i^2 = -1$
   ur denna fås också
   $i = \sqrt{-1}$

2. Med vilken bokstav betecknas mängden av de komplexa talen? (endast svar krävs) (1/0/0)
   Svar: $\mathbb{C}$

3. Lös ekvationerna. Svara exakt.
   a. $x^2 = 81$ (2/0/0)
   $\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{81}$
   $x = \pm 9$
   Svar: $\begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = -9 \end{cases}$

   b. $x^2 = 80$ (2/0/0)
   $\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{80}$
   $x = \pm\sqrt{80}$
   $x = \pm\sqrt{16 \cdot 5}$
   $x = \pm\sqrt{16} \cdot \sqrt{5}$
   $x = \pm 4\sqrt{5}$
   Svar: $\begin{cases} x_1 = 4\sqrt{5} \\ x_2 = -4\sqrt{5} \end{cases}$

   c. $(x-5)^2 = 9$ (2/0/0)
   $\sqrt{(x-5)^2} = \pm\sqrt{9}$
   $x - 5 = \pm 3$
   $x = 5 \pm 3$
   Svar: $\begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

   d. $x^2 = -16$ (2/0/0)
   $x^2 = -1 \cdot 16$
   ersätt -1 med i^2
   $x^2 = 16i^2$
   $\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{16i^2}$
   $x = \pm 4i$
   Svar: $\begin{cases} x_1 = 4i \\ x_2 = -4i \end{cases}$

e. $x(x-5)=0$ (2/0/0)

Nollprodukten ger

$x=0$ och

$x-5=0$

$x=5$

Svar: $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=5 \end{cases}$

f. $(x-3)(2x+8)=0$ (2/0/0)

Nollprodukten ger

$x-3=0$

$x=3$

och

$2x+8=0$

$2x=-8$

$x=-4$

Svar: $\begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-4 \end{cases}$

g. $x^2+9x=0$ (2/0/0)

Faktorisera VL

$x(x+9)=0$

Nollprodukten ger

$x=0$

och

$x+9=0$

$x=-9$

Svar: $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-9 \end{cases}$

h. $x^2 - 4x - 5=0$ (2/0/0)

pq-formel ger

$$x=\frac{4}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2+5}$$

$x=2\pm\sqrt{9}$

$x=2\pm 3$

Svar: $\begin{cases} x_1=5 \\ x_2=-1 \end{cases}$

i. $x^2-4x+5=0$ (2/0/0)

pq-formel ger

$$x=\frac{4}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2-5}$$

$x=2\pm\sqrt{-1}$

$x=2\pm i$

Svar: $\begin{cases} x_1=2+i \\ x_2=2-i \end{cases}$

j. $2(x-2)(x+2)=(x-3)^2$ (1/1/0)

$2(x-2)(x+2)=(x-3)^2$
VL: använd konjugatregel
HL: utveckla med kvadreringsregel
$2(x^2-4)=x^2-6x+9$
$2x^2-8=x^2-6x+9$
$x^2+6x-17=0$
pq-formel ger
$$x=-\frac{6}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2+17}$$
$x=-3\pm\sqrt{26}$
Svar: $\begin{cases} x_1=-3+\sqrt{26} \\ x_2=-3-\sqrt{26} \end{cases}$

k. $(a^2-3a)(a-3a^2)=0$ (0/2/0)

Bryt ut a ur respektive parentes
$a(a-3)\,a(1-3a)=0$
$a^2(a-3)(1-3a)=0$
Nollprodukten ger
$a^2=0$
$a_{1,2}=0$ dubbelrot
$a-3=0$
$a_3=3$
$1-3a=0$
$a_4=\frac{1}{3}$
Svar: i storleksordning
$\begin{cases} a_{1,2}=0 \\ a_3=\frac{1}{3} \\ a_4=3 \end{cases}$

l. $(2n+2)(2n-2)=8(n^2+4)$ (0/2/0)

Bryt ut 2 ur respektive parentes i VL
$2(n+1)\,2(n-1)=8(n^2+4)$
$4(n+1)\,(n-1)=8(n^2+4)$
Dela båda sidor med 4
$(n+1)(n-1)=2(n^2+4)$
VL: Konjugatregel
$n^2-1=2n^2+8$
$0=n^2+9$
$n^2=-9$
$n^2=9i^2$
$n=\pm3i$
Svar: $\begin{cases} n_1=3i \\ n_2=-3i \end{cases}$

m. $3x^3+9x^2+6x=0$ (0/2/0)

Bryt ut $3x$

$3x(x^2+3x+2)=0$
Nollprodukten ger
$3x=0$
$x_1=0$
och
$x^2+3x+2=0$
pq-formel ger

$$x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-2}$$

$$x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{8}{4}}$$

$$x=-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}$$

$x_2=-1$
$x_3=-2$

Svar: $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-1 \\ x_3=-2 \end{cases}$

n. $x^4-7x^2+12=0$ (0/1/1)

Skriv om x^4 med hjälp av potenslag
$(x^2)^2-7\cdot x^2+12=0$
Substituera $x^2=t$
$t^2-7t+12=0$
pq-formel ger

$$t=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2-12}$$

$$t=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}-\frac{48}{4}}$$

$$t=\frac{7}{2}\pm\frac{1}{2}$$

$\begin{cases} t_1=4 \\ t_2=3 \end{cases}$

För att finna x så görs en återsubstitution

$\begin{cases} x^2=t \\ t=4 \end{cases}$ ger
$x^2=4$
$x=\pm 2$
$\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-2 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2=t \\ t=3 \end{cases}$ ger
$x^2=3$
$x=\pm\sqrt{3}$
$\begin{cases} x_3=\sqrt{3} \\ x_4=-\sqrt{3} \end{cases}$

Svar:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = \sqrt{3} \\ x_4 = -\sqrt{3} \end{cases}$$

4. Vilket tal ska stå i rutan för att uttrycket ska gå att faktorisera med hjälp av kvadreringsregel?
   $x^2 + 10x + \square$ (1/0/0)

   "Halva koefficienten för x i kvadrat"

   $$\left(\frac{10}{2}\right)^2 = 5^2 = 25$$

   Svar: 25

5. Faktorisera uttrycket $x^2 + 10x + 25$
   med hjälp av kvadreringsregel. (1/0/0)

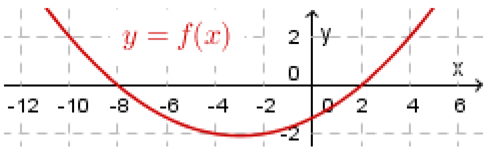
   $x^2 + 10x + 25 =$
   $x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2$
   $(x+5)^2$

6. Lös ekvationen genom att först faktorisera VL (2/0/0)
   $x^2 + 10x + 25 = 49$

   $x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2 = 49$
   $(x+5)^2 = 49$
   $\sqrt{(x+5)^2} = \pm\sqrt{49}$
   $x + 5 = \pm 7$
   $x = -5 \pm 7$

   $$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -12 \end{cases}$$

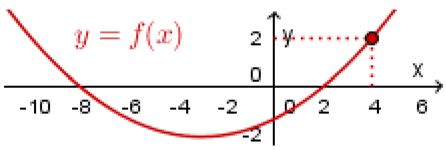
7. Figuren visar grafen till en andragradsfunktion.



   Bestäm

   a. $f(4)$ (1/0/0)

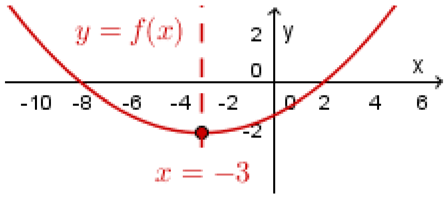
   Avläsning ger $f(4) = 2$



   b. Symmetrilinjen (1/0/0)

   Avläsning ger Symmetrilinje: $x = -3$

α



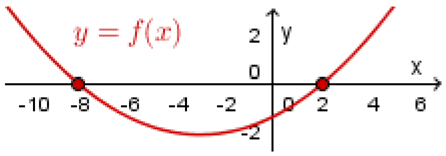
.

c. Funktionens nollställen (1/0/0)

Avläsning ger Nollställen: $x = -8$ och $x = 2$

Kommentar: Vi måste förstå att nollställen är lösningar till ekvationen $(x+8)(x-2) = 0$ och därmed måste vi svara $x = -8$ och $x = 2$,

att svara enbart -8 och 2 ger poängavdrag



8. Bestäm symmetrilinjens ekvation till funktionen
$f(x) = x^2 + 2x - 15$ (2/0/0)

Symmetrilinjen ligger mitt emellan nollställena.

Symmetrilinjens ekvation är

$$x = -\frac{p}{2}$$

$$x = -\frac{2}{2} = -1$$

Svar: $x = -1$

Kommentar: Symmetrilinjen är en lodrät linje och som sådan har den ekvationen $x = a$, vi måste svara $x = -1$, att svara enbart -1 ger poängavdrag.

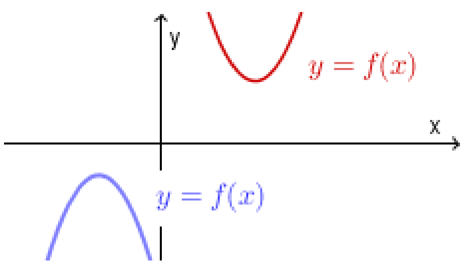
9. För en andragradsfunktion gäller att ekvationen $y = \mathrm{f(x)}$ *saknar* reella lösningar.
Hur kan grafen till funktionen se ut?
Motivera kortfattat ditt svar. (0/1/0)

Grafen skär aldrig x-axeln,

dvs funktionsvärdet är aldrig noll.

$y = f(x)$ öppnar uppåt och har en minimipunkt som ligger över x-axeln

$y = g(x)$ öppnar nedåt och har en maximipunkt som ligger under x-axeln



α

10. Ge ett exempel på en andragradsekvation som har två icke-reella lösningar. Ange också lösningarna (1/1/0)

Till exempel ekvationen

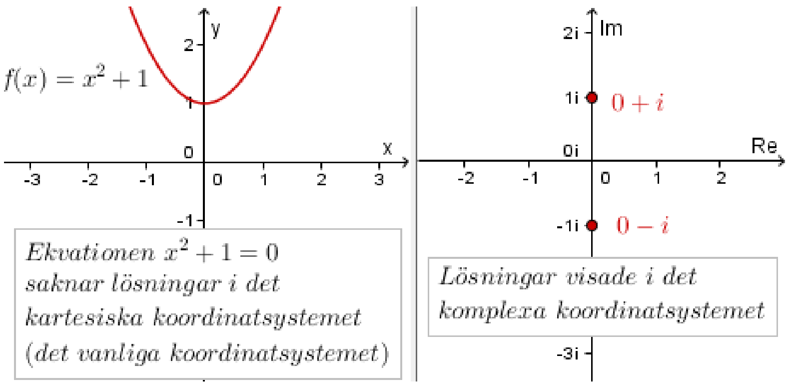
$x^2 + 1 = 0$

$x^2 = -1$

$x = \pm\sqrt{-1}$

$x = \pm i$

$\begin{cases} x_1 = i \\ x_2 = -i \end{cases}$



11. Vilka nollställen har funktionen? Svara exakt.

$f(x) = 2x^2 + 4x - 22$ (1/1/0)

Nollställen ges av ekvationen

$f(x) = 0$

$2x^2 + 4x - 22 = 0$

$2(x^2 + 2x - 11) = 0$

$x^2 + 2x - 11 = 0$

$$x = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + 11}$$

$x = -1 \pm \sqrt{12}$

$x = -1 \pm \sqrt{4}\sqrt{3}$

$x = -1 \pm 2\sqrt{3}$

$\begin{cases} x_1 = -1 + 2\sqrt{3} \\ x_1 = -1 - 2\sqrt{3} \end{cases}$

12. En elev multiplicerar två på varandra följande heltal och får produkten 1406

Vilka tal har eleven multiplicerat? (2/1/0)

Antag att det ena talet är x då blir det andra talet $x + 1$ och vi får ekvationen

$x(x + 1) = 1406$

$x^2 + x - 1406 = 0$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1406}$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{5624}{4}}$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5625}{4}}$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5625}}{\sqrt{4}}$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3^2 5^4}}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{3 \cdot 5^2}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{75}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{75}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = 37 \\ x_2 = -38 \end{cases}$$

Svar: 37 och 38 eller -38 och -37

13. Funktionen $y = x^2 - 8x + 7$ är given.

a. Bestäm funktionens nollställen. (2/0/0)

Ekvationen $y = 0$ ger nollställen

$x^2 - 8x + 7 = 0$

$$x = \frac{8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - 7}$$

$x = 4 \pm 3$

$$\begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

b. Bestäm koordinaterna för funktionens extrempunkt. (2/0/0)

Extrempunkten ligger någonstans på symmetrilinjen, som går mitt emellan nollställena.

Ett sätt att finna symmetrilinjen är att beräkna medelvärdet av nollställena

$$x = \frac{1+7}{2} = 4$$

$y(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 7 = 16 - 32 + 7 =$
$23 - 32 = -9$

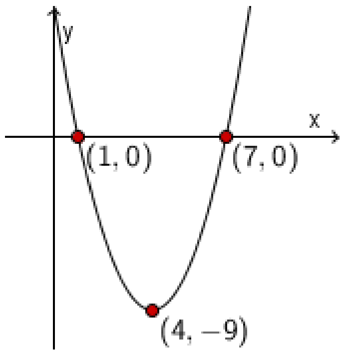
Svar: Extrempunkten är $(4, -9)$

c. Vilken typ av extrempunkt är det? Motivera. (1/0/0)

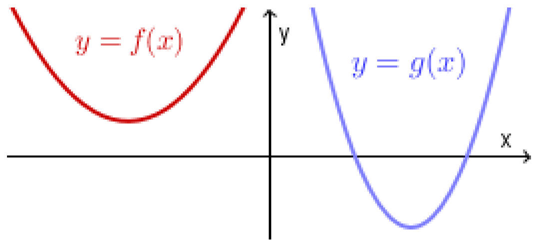
Extrempunkten är en $minimipunkt$ då koefficienten för x^2 är positiv

d. Skissa grafen till funktionen utifrån informationen du beräknat ovan. (1/0/0)

α



14. Funktionerna och g är båda av formen
$y = x^2 + px + q$.
Avgör med hjälp av graferna
till funktionerna om diskriminanten
till ekvationerna $f(x) = 0$ och $g(x) = 0$
är positiv eller negativ. (0/1/1)



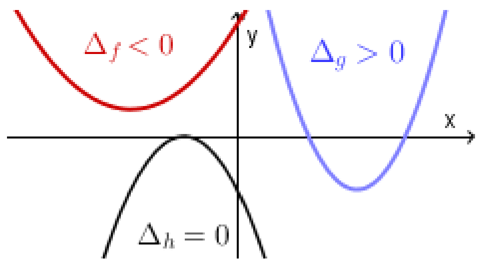
Då grafen till funktionen $f(x)$
inte skär x-axeln så är $f(x) \neq 0$
och därmed är diskriminanten

$$\Delta = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$$

Då grafen till funktionen $g(x)$
skär x-axeln så är $g(x) = 0$
och därmed är diskriminanten

$$\Delta = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$$

Svar: $\Delta_f < 0$ och $\Delta_g > 0$



15. $x^2 + 4x + 4 = 0$

a. Beräkna diskriminanten Δ (0/1/0)

$$\Delta = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$\Delta = \left(\frac{4}{2}\right)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

Svar: $\Delta = 0$

b. Hur många lösningar har ekvationen? (0/1/0)

Då $\Delta = 0$ så har ekvationen en reell lösning, dubbelrot

Svar: En reell lösning, dubbelrot

16. Ange en andragradsekvation
med lösningarna $x = \pm 3i\sqrt{2}$ (0/2/0)

Om lösningarna är $x = \pm 3i\sqrt{2}$
så kan ekvationen skrivas på faktorform som

$(x + 3i\sqrt{2})(x - 3i\sqrt{2}) = 0$

Konjugatregeln ger

$x^2 - (3i\sqrt{2})^2 = 0$

$x^2 - 18i^2 = 0$

Då $i^2 = -1$ fås

$x^2 + 18 = 0$

Svar: till exempel $x^2 = -18$

17. $f(x) = x^2 + px + 5$

a. Vilket värde på p gör att grafens
symmetrilinje blir $x = 8$ (0/1/0)

Symmetrilinjens ekvation är

$x = -\frac{p}{2}$

om $x = 8$ fås

$8 = -\frac{p}{2}$

$p = -16$

b. Vilka nollställen har funktionen
med detta värde på p ? (0/2/0)

$f(x) = x^2 - 16x + 5$

$f(x) = 0$ ger

$x^2 - 16x + 5 = 0$

$x = 8 \pm \sqrt{8^2 - 5}$

$x = 8 \pm \sqrt{59}$

$\begin{cases} x_1 = 8 + \sqrt{59} \\ x_2 = 8 - \sqrt{59} \end{cases}$

c. Bestäm grafens extrempunkt (0/2/0)

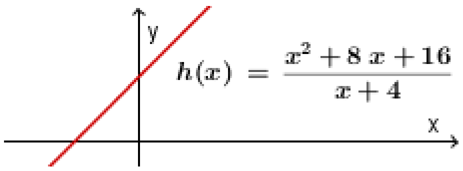
Då extrempunkten ligger på
symmetrilinjen $x = 8$
fås extrempunktens y-koordinat av

$f(8) = 8^2 - 16 \cdot 8 + 5 = 64 - 128 + 5 = -59$

Svar: $(8, -59)$

α

18. En graf till funktionen $h(x)$ är ritad nedan.
Förklara varför grafen är en rät linje. (0/1/0)



$$h(x) = \frac{x^2+8x+16}{x+4}$$

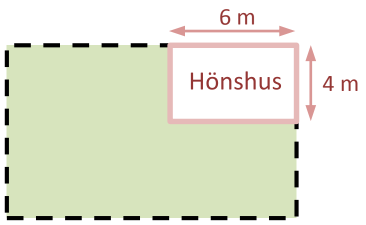
faktorisera täljaren mha kvadreringsregel

$$h(x) = \frac{(x+4)^2}{x+4}$$

förkorta gemensam faktor

$h(x) = x + 4$ vilket är en rät linje

19. Du vill bygga en inhägnad runt ditt hönshus.
Du har köpt 50 meter stängsel
och behöver inte sätta stängsel runt själva hönshuset.
Vilken är den största area som inhägnaden kan få?
(Hönshusets area räknas *inte* med i inhägnaden) (0/2/3)



$\text{Area} = \text{bas} \cdot \text{höjd} - \text{hönshus}$

$A = b \cdot h - 24 \ldots (1)$

$\text{Längd}_{\text{stängsel}} = \text{bas} + \text{höjd} + (\text{bas} - 6) + (\text{höjd} - 4)$

$50 = b + h + b - 6 + h - 4$

$50 = 2b + 2h - 10$

$60 = 2b + 2h$

Lös ut h

$$h = \frac{60 - 2b}{2}$$

$h = 30 - b \ldots (2)$

(2) i (1) ger

$A = b \cdot (30 - b) - 24$

$A = -b^2 + 30b - 24$

A är en andragradsfunktion med ett maximum
då koefficienten framför kvadrattermen är negativ.
Symmetrilinjen går genom maxpunkten.
Symmetrilinjens ekvation är

$$x = -\frac{p}{2}$$

innan denna används skriv om ekvationen
så att koefficienten framför kvadrattermen är 1

$-b^2 + 30b - 24 = 0$

$-(b^2 - 30b + 24) = 0$

$b^2 - 30b + 24 = 0$

$b = -\frac{-30}{2}$

$b = 15$

$A(15) = -15^2 + 30 \cdot 15 - 24 =$

$-225 + 450 - 24 = 201$

Svar: Maximal area ca 200 m^2

20. En lösning till en andragradsekvation kallas en rot till ekvationen. Du ska nu studera andragradsekvationen $x^2 + ax = -16$ och undersöka hur värdet på konstanten a påverkar ekvationens rötter. (3/4/4)

a. Bestäm ekvationens rötter för $a = 10$

$x^2 + 10x = -16$

$x^2 + 10x + 16 = 0$

$x = -5 \pm \sqrt{5^2 - 16}$

$x = -5 \pm 3$

$\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -8 \end{cases}$

b. Bestäm rötterna till ekvationen för $a = 0$

$x^2 + 0x = -16$

$x^2 = -16$

$x = \pm\sqrt{-16}$

$x = \pm\sqrt{16} \cdot \sqrt{-1}$

$x = \pm 4i$

$\begin{cases} x_1 = 4i \\ x_2 = -4i \end{cases}$

c. Ange värdet på a så att ekvationen får rötterna $x =- 16$ och $x =- 1$

Skriv ekvationen i faktorform

$(x - (-16))(x - (-1)) = 0$

$(x + 16)(x + 1) = 0$

$x^2 + x + 16x + 16 = 0$

$x^2 + 17x + 16 = 0$

$x^2 + 17x = -16$

Svar: $a = 17$

d. Undersök hur värdet på a påverkar antalet reella rötter till ekvationen.

$x^2 + ax = -16$

$x^2 + ax + 16 = 0$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 16}$$

Diskriminanten är

$$\Delta = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 16$$

α

Om $\Delta = 0$ fås en reell rot

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 16 = 0$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 16$$

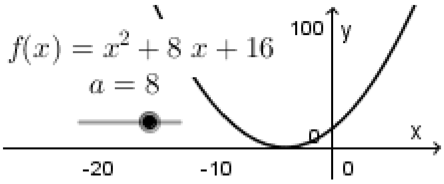
$$\frac{a}{2} = \pm 4$$

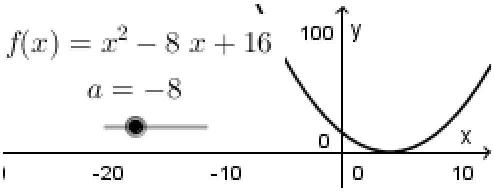
$$a = \pm 8$$

Resultatet visas nedan,

grafen har en punkt gemensam med x-axeln

då $a = 8$ eller $a = -8$





Om $\Delta > 0$ fås två reella rötter

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 16 > 0$$

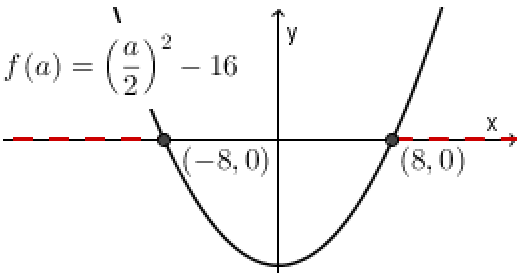
Faktorisera VL

$$\left(\frac{a}{2} + 4\right)\left(\frac{a}{2} - 4\right) > 0$$

Den vänstra parentesen är noll om $a = -8$

Den högra parentesen är noll om $a = 8$

Skissa kurvan för *diskriminanten*



Vi avläser att för

$a > 8$

och

$a < -8$

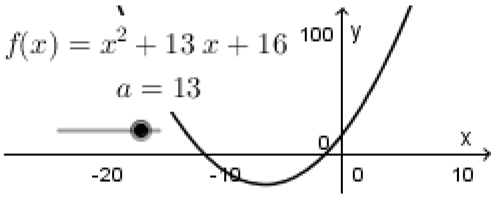
är diskriminanten positiv.

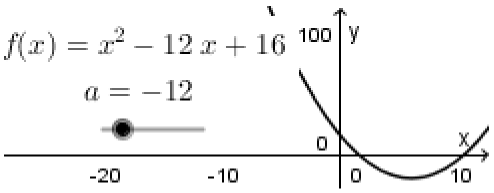
Resultatet visas nedan,

grafen skär x-axeln två gånger.

då till exempel $a = 13$ och $a = -12$

α





Om $\Delta < 0$ fås inga reella rötter

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 16 < 0$$

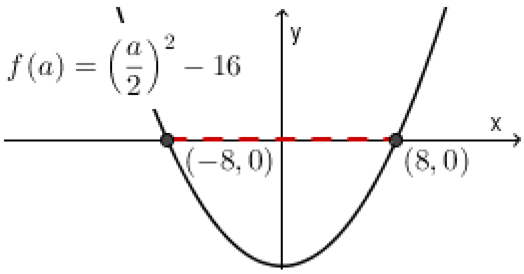
Faktorisera VL

$$\left(\frac{a}{2} + 4\right)\left(\frac{a}{2} - 4\right) > 0$$

Den vänstra parentesen är noll om $a = -8$

Den högra parentesen är noll om $a = 8$

Skissa kurvan för *diskriminanten*



Vi avläser att för

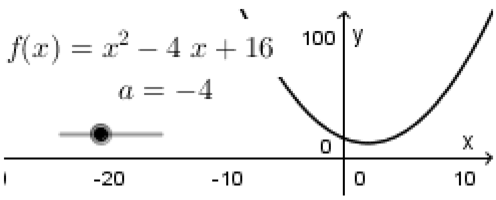
$-8 < a < 8$

är diskriminanten negativ

Resultatet visas nedan,

grafen har inga punkter gemensamt med x-axeln

när till exempel $= -4$



Svar:

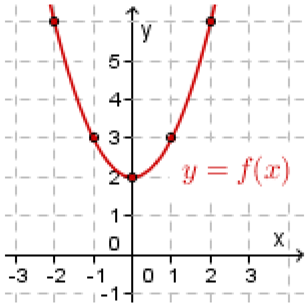
$a = \pm 8$ en reell lösning

$a > 8$ eller $a < -8$ två reella lösningar

$-8 < a < 8$ inga reella lösningar

21. Bestäm de komplexa rötterna till andragradsekvationen

a. $f(x) = 0$ (0/2/0)



Alla andragradsfunktioner kan skrivas på formen

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Genom att studera några punkter på kurvan ser vi att

$a = 1$ (kurvan har samma form som $y = x^2$)

Symmetrilinjens ekvation är

$$x = -\frac{b}{2a}$$

I figuren avläses att symmetrilinjen är $x = 0$

vilket med $a = 1$ ger

$$0 = -\frac{b}{2 \cdot 1}$$

$b = 0$

Funktionen kan nu skrivas

$f(x) = x^2 + c$

För att finna c välj en punkt på kurvan och

stoppa in koordinaternas värden i samband ovan.

Om punkten $(1, 3)$ väljs fås

$f(1) = 1^2 + c = 3$

$1 + c = 3$

$c = 2$ vilket ger

$f(x) = x^2 + 2$

Lös ekvationen $f(x) = 0$

$x^2 + 2 = 0$

$x^2 = -2$

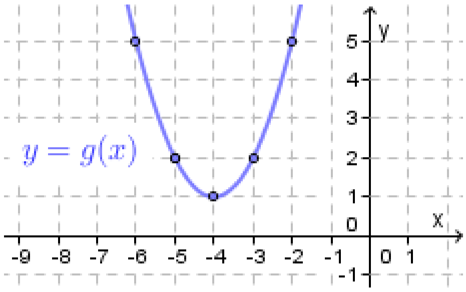
$x = \pm\sqrt{-2}$

$x = \pm\sqrt{-1} \cdot \sqrt{2}$

$x = \pm\, i\sqrt{2}$

$$\begin{cases} x_1 = i\sqrt{2} \\ x_2 = -i\sqrt{2} \end{cases}$$

b. $g(x) = 0$ (0/0/2)



Alla andragradsfunktioner kan skrivas på formen
$f(x) = ax^2 + bx + c$
Genom att studera några punkter på kurvan ser vi att
$a = 1$ (kurvan har samma form som $y = x^2$)

Symmetrilinjens ekvation är
$x = -\dfrac{b}{2a}$
I figuren avläses att symmetrilinjen är $x = -4$
vilket med $a = 1$ ger
$-4 = -\dfrac{b}{2 \cdot 1}$
$b = 8$

Funktionen kan nu skrivas
$f(x) = x^2 + 8x + c$
För att finna c välj en punkt på kurvan och
stoppa in koordinaternas värden i samband ovan.
Om punkten $(-3, 2)$ väljs fås

$f(-3) = (-3)^2 + 8(-3) + c = 2$
$9 - 24 + c = 2$
$c = 17$
$f(x) = x^2 + 8x + 17$

Lös ekvationen $f(x) = 0$
$x^2 + 8x + 17 = 0$
$x = -4 \pm \sqrt{4^2 - 17}$
$x = -4 \pm \sqrt{-1}$
$x = -4 \pm i$
$\begin{cases} x_1 = -4 + i \\ x_2 = -4 - i \end{cases}$

22. För vilka värden på det reella talet a
har ekvationen $x^2 + ax + a = 0$
    a. två reella rötter (0/1/2)

Lös ekvationen med pq-formeln

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - a}$$

$$\Delta = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - a$$

α

Diskriminanten avgör hur många rötter ekvationen har

$$\Delta = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - a = \frac{a^4}{4} - \frac{4a}{4} = \frac{a^4 - 4a}{4}$$

om $\Delta > 0$ två rötter.

$$\frac{a^4 - 4a}{4} > 0$$

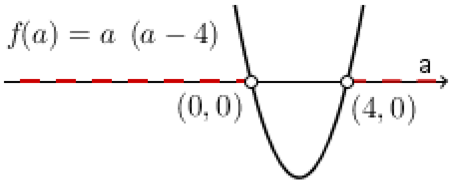
$$a^2 - 4a > 0$$

$$a(a-4) > 0$$

Nollställen för VL är

$a = 0$ och $a = 4$

Graf för VL



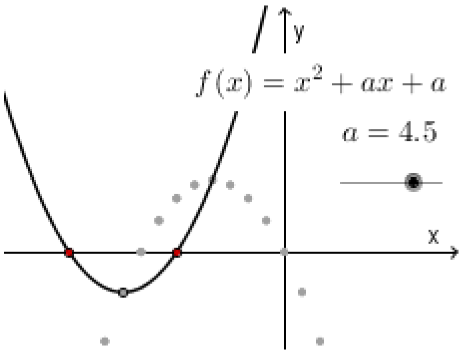
Avläsning ger att för

$a < 0$ och $a > 4$

är $a^2 - 4a > 0$

Svar: $a < 0$ och $a > 4$

Som exempel visar grafen nedan att när $a = 4.5$ finns två reella rötter



b. en reell dubbelrot (0/1/1)

$$\Delta = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - a = \frac{a^2}{4} - \frac{4a}{4} = \frac{a^2 - 4a}{4}$$

om $\Delta = 0$ en reell dubbelrot

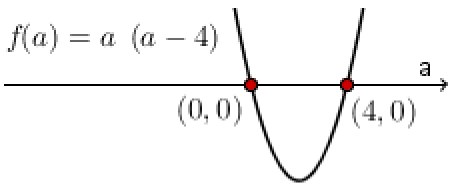
$$\frac{a^2 - 4a}{4} = 0$$

$$a^2 - 4a = 0$$

$$a(a-4) = 0$$

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 4 \end{cases}$$

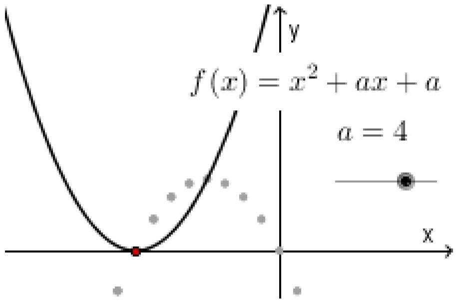
Graf för VL



α

Svar: $a = 0$ eller $a = 4$

Som exempel visar grafen nedan att
när $a = 4$ finns en reell rot



c. ingen reell rot (0/1/2)

$\Delta = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - a = \frac{a^2}{4} - \frac{4a}{4} = \frac{a^2 - 4a}{4}$

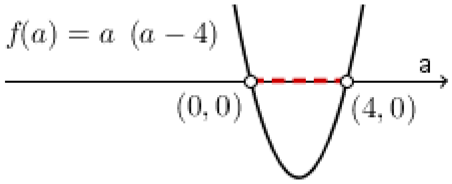
om $\Delta < 0$ ingen reell rot

$\frac{a^2 - 4a}{4} < 0$

$a^2 - 4a < 0$

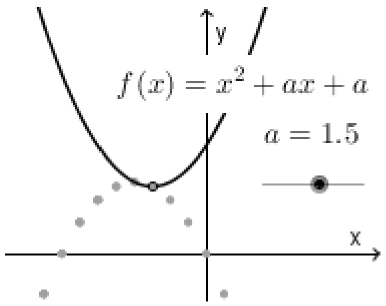
$a(a - 4) < 0$

Graf för VL



Avläsning ger att för
$0 < a < 4$
är $a(a - 4) < 0$ sålunda är $\Delta < 0$
Svar: $0 < a < 4$

Som exempel visar grafen nedan att
när $a = 1.5$ finns ingen reell rot



23. Många länder (och det mesta skrivet om andragradsekvationer på Internet) använder den så kallade abc-formeln istället för pq-formeln när man löser andragradsekvationer.

Den formeln säger att ekvationen

$ax^2 + bx + c = 0$ har lösningarna

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Bevisa att formeln ger ekvationens lösningar (0/0/3)

I bokens facit finns en lösning som bygger på att man känner till pq-formeln, här visas en lösning som använder kvadratkomplettering, samma tillvägagångsätt som användes när pq-formeln bevisades

$ax^2 + bx + c = 0$

dela med a

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

komplettera med "halva koefficienten för x i kvadrat" på båda sidor

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

24. Visa att funktionen $f(x) = x^2 + px + q$ har minsta värdet (0/0/2)

$$-\frac{p^2}{4} + q$$

Minimivärdet (extrempunkten) ligger på symmetrilinjen som ges av

$$x = -\frac{p}{2}$$

Sätt in detta värde på x i funktionen

$$f\left(-\frac{p}{2}\right) = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 + p\left(-\frac{p}{2}\right) + q =$$

$$\frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q =$$

$$\frac{p^2}{4} - \frac{2 \cdot p^2}{2 \cdot 2} + q =$$

$$\frac{p^2 - 2p^2}{4} + q =$$

$$-\frac{p^2}{4} + q \quad v.s.v.$$

25. Vilken är extrempunkten till funktionen som ges av $f(x) = ax^2 + bx + c$

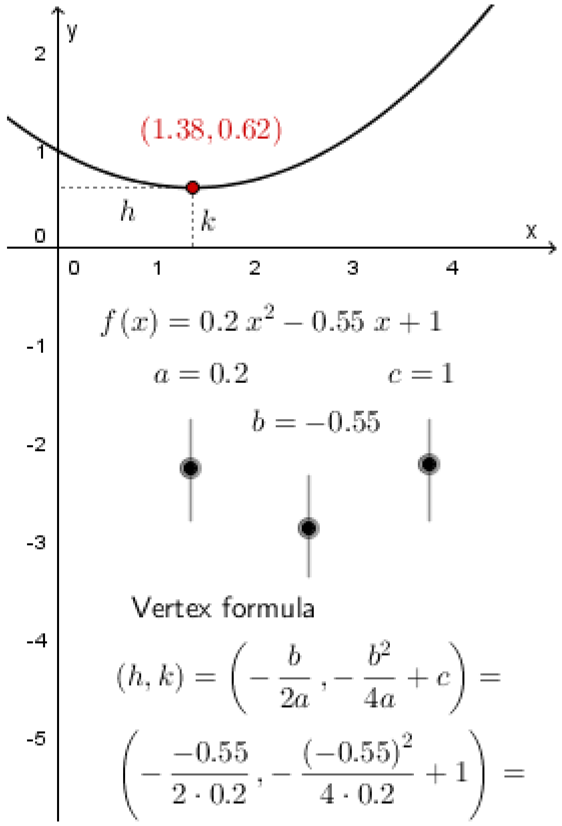
och vilken typ av extrempunkt är det?
(när du är klar så har du fått fram vertex-formeln
som knyter samman koefficienterna a, b och c
med extrempunktens koordinater) (0/0/3)

$f(x) = ax^2 + bx + c$
Sätt $f(x) = 0$ ger
$ax^2 + bx + c = 0$
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
Symmetrilinjens ekvation är
$x = -\frac{b}{2a}$
Då extrempunkten ligger på
symmetrilinjen, vet vi att x-koordinaten
för extrempunkten är
$x = -\frac{b}{2a}$
För att finna y-koordinaten för extrempunken
sätt in dess x-värde i funktionen
$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c =$
$a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{2 \cdot b^2}{2 \cdot 2a} + c =$
$\frac{b}{4a}^2 - \frac{2b^2}{4a} + c = \frac{b^2 - 2b^2}{4a} + c =$
$\frac{-b^2}{4a} + c$
Svar: Extrempunkten är
$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2}{4a} + c\right)$
om $a > 0$ minimipunkt
om $a < 0$ maximipunkt

Lite extra läsning:
Om extrempunktens x-koordinat kallas för h (horisontell förflyttning)
och y-koordinaten för k fås
$(h, k) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2}{4a} + c\right)$
som kallas vertex-formeln

Nedan visas ett exempel på hur extrempunkten
kan bestämmas med hjälp av resultatet i uppgiften

α



(1.38, 0.62)
h
k
x
y
f(x) = 0.2 x² − 0.55 x + 1
a = 0.2
c = 1
b = −0.55
Vertex formula
(h, k) = (−b/2a, −b²/4a + c) =
(−(−0.55)/(2 · 0.2), −(−0.55)²/(4 · 0.2) + 1) =